正の定曲率曲面上の凸閉曲線の Minimal circular ring について

岡　田　一　男

On the minimal circular Ring of the convex closed Curve on the Surface of positive-constant Curvature.

Kazuo OKADA*

(Recieved October 15, 1965)

The surface of positive-constant curvature is a sphere, so we may assume that the sphere is the unit sphere. We consider a convex closed curve K on the unit sphere. Here we define that the convex closed curve K on the unit sphere is a closed curve which has following properties:

(1) K is a closed curve on the unit sphere.

(2) If we make the tangential great circle t at each point of K, K is completely contained on the surface of the hemisphere encircled by t.

Let G be the spherical closed domain enclosed by K. The domain G is interpreted in two ways, but we consider the domain on the hemisphere which contains K.

Let P is a point of G and Q is a variable point of K. Then we consider the function $R\ (\mathrm{P}) = \max\limits_{\mathrm{Q}} \overset{\frown}{\mathrm{P\,Q}}$.

Here we shall use the notation that $\overset{\frown}{\mathrm{P\,Q}}$ denotes the great circle through the points P and Q, or the length of the minor arc of the great circle. R (P) has the minimum value R_u at a certain point P on G. R_u is the radius of the circumscribed circle of K.

Similarly, the function $r\ (\mathrm{P}) = \min\limits_{\mathrm{Q}} \overset{\frown}{\mathrm{P\,Q}}$

has the maximum value r_i. r_i is the radius of the inscribed circle of K.

We call the function $O\ (\mathrm{P}) = R\ (\mathrm{P}) - r\ (\mathrm{P})$ "the oscillation of the convex closed curve K about the point P". When O (P) is the minimum at P, we consider two concentric circles with the center P whose radii are respectively R (P) and r (P). The figure of this concentric circles is called "the minimal circular ring of the convex closed curve K".

In the present paper we assume that the diameter of the convex closed curve K is less than $\frac{\pi}{2}$.

First we shall prove that the center of the minimal circular ring of K is not on K and the center is unique.

* 数　学　教　室
Department of Mathematics

Then, we shall use the following notatins:
R_u denotes the radius of the circumscribed circle of K, O_u denotes the center of the above circle, R denotes the radius of the outer circle of the minimal circular ring, O denotes the center of the above ring. r_i denotes the radius of the inscribed circle of K, r denotes the radius of the inner circle of the minimal circular ring, and finally $\varDelta$ denotes the length of $\widehat{O_u O}$.

The relations

$$\cos R \geqq \cos R_u \frac{\cos (R_u - \varDelta)}{\cos (R_u - 2\varDelta)},$$

$$\cos r \leqq \cos r_i \frac{\cos R}{\cos 2R}$$

hold for K. If R_u is constant, that is, the circumscribed circle of the convex closed curve is given, R takes the maximum for $\varDelta$ which satisfies

$$3 \sin \varDelta = \sin (2 R_u - 3 \varDelta).$$

Moreover the solution of the above equation for $\varDelta$ is unique.

正の定曲率曲面は球面である。従って半径が1である球面について考える。この球面上に凸閉曲線Kをとる。ここで球面上の凸閉曲線とは，球面上の閉曲線でこの曲線上の各点でこれに接する大円をつくるときにこの閉曲線が常に大円でかこまれた一方の半球面上に完全にふくまれているものである。以下にのべる凸閉曲線とはすべて上のような性質をもった閉曲線を意味するものである。

Kでかこまれた球面上の閉領域（この領域は2通り考えられるが，Kののつている半球面上にある領域）をGとする。PをGの1点，QをKの動点とすれば

函数 $$R(\mathrm{P}) = \max_{\mathrm{Q}} \widehat{\mathrm{PQ}}$$

が考えられ，ある点Pで R(P) が最小値 R_u をとる。ここで $\widehat{\mathrm{PQ}}$ は，2点P，Qを通る大円の劣弧 PQ の長さを表わすものとする。また2点P，Qを通る大円を $\widehat{\mathrm{PQ}}$ で示すこともある。以下 $\widehat{\mathrm{PQ}}$ はこの両方の意味に用いる。最小値 R_u はKの外接円の半径に等しいのである。

R (P) と同様に

函数 $$r(\mathrm{P}) = \min_{\mathrm{Q}} \widehat{\mathrm{PQ}}$$

が考えられ，その最大値を r_i とする。r_i はKの内接円の半径に等しいのである。

函数 $$O(\mathrm{P}) = R(\mathrm{P}) - r(\mathrm{P})$$

を**点Pに関する曲線の Oscillation** という。Gのある点Pに対して O(P) が最小値をとるとき，Pを中心とし半径 R(P) および r(P) の2つの同心円をつくる。この2つの同心円の図形を凸閉曲線Kの **minimal circular ring**, 同心円の中心を **mimimal circular ring の中心**，このときの O(P) をKの **minimal circular ring の厚さ**，同心円の外側の円を**外円**，内側の円を**内円**という。

凸閉曲線上の2点を結ぶ大円の劣弧の長さの最大値を，この**凸閉曲線の直径**という。

本論文でのべる凸閉曲線とはすべてその直径が $\leqq \frac{\pi}{2}$ であるものと仮定する。

凸閉曲線の minimal circular ring についてつぎの定理が成立する。

定理 凸閉曲線Kの minimal circular ring の中心は領域Gの周上にはなく，かつ1個存在してただ1個に限る。

定理 凸閉曲線Kの外接円の半径を R_u, 中心を O_u, minimal circular ring の外円の半径を R,

内円の半径を r, その中心を O, $\widehat{O_u O} = \Delta$, K の内接円の半径を r_i とするとき，つぎの不等式が成立する。

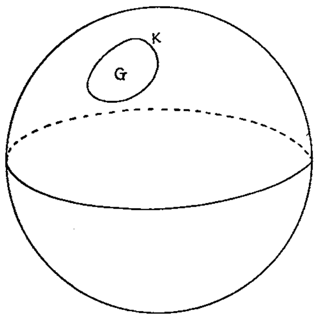
$$\cos R \geqq \cos R_u \frac{\cos (R_u - \Delta)}{\cos (R_u - 2\Delta)},$$

$$\cos r \leqq \cos r_i \frac{\cos R}{\cos 2R}$$

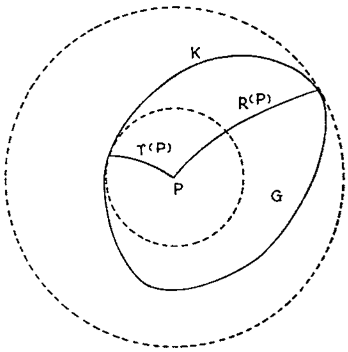
R_u が一定であるとき，即わち凸閉曲線の外接円が与えられているとき，

$$3 \sin \Delta = \sin (2 R_u - 3 \Delta)$$

であるような Δ の値に対して R が最大値をとる。またこのような Δ の値はただ1つある。



第 1 図



第 2 図

§ 1. R (P) の Convexity の定義

閉領域Gの点Pに対して定義せられている函数 f(P) について，Gの任意の2点をP_1, P_2, $\widehat{P_1P_2}$ の中点を P_0 とするとき

$$f(P_1) + f(P_2) \geqq 2f(P_0) \qquad (1.1)$$

が成立するならば，f(P) は **convex であるという。**

予備定理　球面上で $\widehat{P_1P_2} \leqq \frac{\pi}{2}$ である2点 P_1, P_2 をとり，$\widehat{P_1P_2}$ の中点を P_0,

$$\widehat{SP_1} < \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{SP_2} < \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{SP_0} < \frac{\pi}{2}$$

であるような任意の点をSとするとき

$$2\,\widehat{P_0S} \leqq \widehat{P_1S} + \widehat{P_2S}$$

が成立する。

（証明）

$\widehat{SP_0}$ の延長上に $\widehat{SP_0} = \widehat{P_0S'}$ であるように点 S′ をとり，球の中心をOとすれば

$$\angle SOP_2 + \angle P_2OS' > \angle SOS'$$

$$\therefore \quad \widehat{P_2S'} + \widehat{P_2S} > \widehat{SS'} = 2\,\widehat{P_0S}$$

$\widehat{P_2S'} = \widehat{P_1S}$　　が成立するから

$$\widehat{P_1S} + \widehat{P_2S} > 2\,\widehat{P_0S}$$

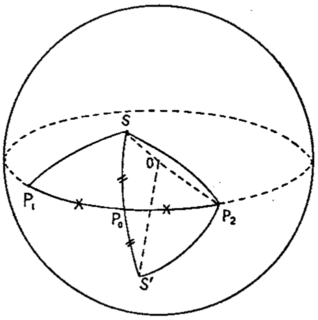
Sが $\widehat{P_1P_2}$ の延長上にあれば

$$2\,\widehat{P_0S} = \widehat{P_1S} + \widehat{P_2S}$$

よって

$$2\,\widehat{P_0S} \leqq \widehat{P_1S} + \widehat{P_2S} \qquad (1.2)$$

故に定理が証明せられた。



第 3 図

Gの任意の2点 P_1, P_2 をとり，$\widehat{P_1P_2}$ の中点を P_0, P_0 から最大距離にあるK上の点をSとすれば

$$\widehat{P_0S} = R\ (P_0)$$

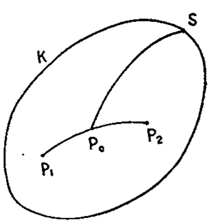
$$\widehat{P_1S} \leqq R\ (P_1)$$

$$\widehat{P_2S} \leqq R\ (P_2)$$

(1. 2) から

$$2\,\widehat{P_0S} = 2\,R\ (P_0) \leqq \widehat{P_1S} + \widehat{P_2S} \leqq R\ (P_1) + R\ (P_2)$$

(1. 1), (1. 2) から，つぎの定理が得られる。



第 4 図

定理 1. 凸閉曲線Kにおいて，$\boldsymbol{R}$ (P) は領域Gの点に対して convex である。

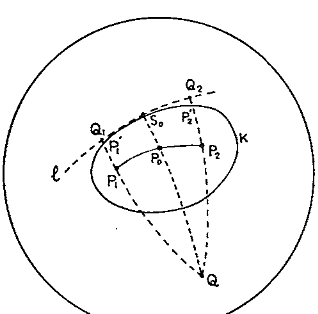
§ 2. r (P) の concavity の定義

領域Gの点Pに対して定義されている函数 f(P) について， Gの任意の2点を P_1, P_2, $\widehat{P_1P_2}$ の中点を P_0 とするとき

$$f(P_1) + f(P_2) \leqq 2\,f(P_0) \qquad (2.1)$$

が成立するならば，f(P) は concave であるという。

Gの2点を P_1, P_2, $\widehat{P_1P_2}$ の中点を P_0, P_0 から最短距離にあるK上の点を S_0 とする。S_0 を通り $\widehat{P_0S_0}$ に垂直な大円 l をつくれば，l がK上での P_0 からの最短距離の大円弧であるから，l はKに接している。よって大円 l は，球面上の凸閉曲線の定義により，Kの外側にある。大円 l の極をQ，$\widehat{QP_1}$ および $\widehat{QP_2}$ が l と交わる点を Q_1, Q_2 とすれば



第 5 図

$$\widehat{QQ_1} \perp \widehat{Q_1Q_2}\,, \qquad \widehat{QQ_2} \perp \widehat{Q_1Q_2}$$

$\widehat{QQ_1}$, $\widehat{QQ_2}$ とKとの交点を P'_1, P'_2 とする。

$$\widehat{QP_1} < \frac{\pi}{2}, \qquad \widehat{QP_2} < \frac{\pi}{2}$$

であるから $\qquad \widehat{QP_0} < \dfrac{\pi}{2}$

(1. 2) により

$$2\,\widehat{QP_0} \leqq \widehat{QP_1} + \widehat{QP_2}$$

Qは大円 $Q_1S_0Q_2$ の極であるから

$$\widehat{QQ_1} = \widehat{QS_0} = \widehat{QQ_2}$$

$$\therefore\ \widehat{QP_1} = \frac{\pi}{2} - \widehat{P_1Q_1}\,,\quad \widehat{QP_2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{P_2Q_2}\,,$$

$$\widehat{QP_0} = \frac{\pi}{2} - \widehat{P_0S_0}$$

よって
$$2\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{P_0S_0}\right)\leqq\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{P_1Q_1}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{P_2Q_2}\right)$$

∴
$$2\,\widehat{P_0S_0}\geqq\widehat{P_1Q_1}+\widehat{P_2Q_2}\geqq\widehat{P_1P'_1}+\widehat{P_2P'_2}$$

$$2\,r\,(P_0)\geqq\widehat{P_1P'_1}+\widehat{P_2P'_2}\geqq r\,(P_1)+r\,(P_2)$$

よってつぎの定理が得られる。

定理 2. 凸閉曲線Kにおいて，函数 r (P) は領域Gの点に対して concave である。

§ 3. Oscillatin O (P)

O (P) $= R$ (P) $- r$ (P) 　　である。

Gの2点を P_1, P_2, $\widehat{P_1P_2}$ の中点を P_0 とするとき

$$\begin{aligned}O\,(P_0)&=R\,(P_0)-r\,(P_0)\\&\leqq\frac{1}{2}\left\{R\,(P_1)+R\,(P_2)\right\}-\frac{1}{2}\left\{r\,(P_1)+r\,(P_2)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{O\,(P_1)+O\,(P_2)\right\}\end{aligned}$$

である。よって

定理 3. 凸閉曲線Kでかこまれた領域Gの点Pに対して Oscillation O (P) は convex である。

O (P) は領域Gのすべての点について，負でない連続函数であるから，Weierstrass の定理により最小値をもっている。もしKが円であればこのときのみ O (P) $=0$ である。

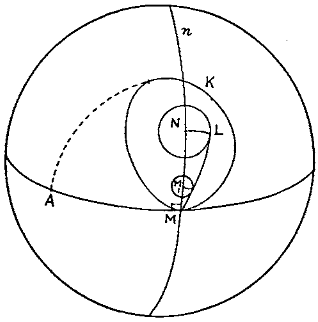
定理 4. 領域Gで O (P) が最小値をとる点は，凸閉曲線Kの周上にはない。

(証明) O (P) が最小値をとる点，即わち minimal circular ring の中心Mがもし K上にあったとする。Mが尖点でなければ，MでKに垂直な大円 n をつくれば，n の一部はKの内部にある，もしMが尖点であれば，Mを通りKの内部を通るような任意の大円 n をつくり，Mを通り n に垂直な大円を supporting great circle と考える。よっていずれの場合でも，MにおいてKに垂直な大円の一部はKの内部にある。n 上の点でKの内部にある点をNとする。Nを中心としてKの内部に完全にふくまれる円をつくり，その半径（球面距離）を a とする。

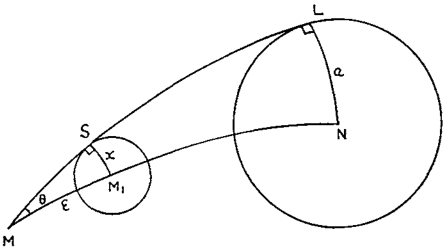
$\widehat{MN}$ 上の任意の点を M_1, M を通り円Nに接する大円弧 $\widehat{ML}$ をつくり，その接点を L とする。M_1 を通り $\widehat{ML}$ に垂直な大円をつくり，$\widehat{ML}$ との交点をSとする。$\widehat{ML}$ は円Nに接するから

$$r\,(M_1)\geqq\widehat{M_1S}$$

$$\angle\,NML=\theta,\quad \widehat{M_1S}=x\qquad とおけば$$



第 6 図



第 7 図

$$\sin a = \sin\theta \sin \widehat{\mathrm{MN}}$$

$$\sin x = \sin\theta \sin \widehat{\mathrm{MM_1}}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin a}{\sin x} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{MN}}}{\sin \widehat{\mathrm{MM_1}}}$$

$$\therefore \quad \sin x = \sin \widehat{\mathrm{SM_1}} = \frac{\sin a}{\sin \widehat{\mathrm{MN}}} \sin \widehat{\mathrm{MM_1}} \tag{3.1}$$

$\widehat{\mathrm{MM_1}} = \varepsilon$ とおけば x は ε の函数である。点Mに対するKの oscillation O (M) を考える。

$$O(\mathrm{M}) = R(\mathrm{M}) - r(\mathrm{M})$$

MはK上の点であるから $r(\mathrm{M}) = 0$

$$\therefore \quad O(\mathrm{M}) = R(\mathrm{M})$$

Kの直径は $\leqq \frac{\pi}{2}$ であるから

$$O(\mathrm{M}) = R(\mathrm{M}) \leqq \frac{\pi}{2}$$

$O(\mathrm{M}) = R$ とおく。

Mを中心として半径 R の円をつくれば，Kはこの円の内部に完全にふくまれてしまう。何となれば O (M) 即わち R (M) は，点MとK上の点との距離の最大値であるから。円Mと，MでKに接する大円との交点をAとすれば，$\widehat{\mathrm{AM}} = R$ であるから点AはK上にあるかまたはKの外部にある。

(3.1) は
$$\sin x = \frac{\sin a}{\sin \widehat{\mathrm{MN}}} \sin \varepsilon$$

とかかれる。これを ε で微分して

$$\cos x \frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{\sin a}{\sin \widehat{\mathrm{MN}}} \cos \varepsilon$$

$$\therefore \quad \left[\frac{dx}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \frac{\sin a}{\sin \widehat{\mathrm{MN}}} \tag{3.2}$$

球面直角三角形 A M $\mathrm{M_1}$ $\left(\angle \mathrm{M} = \frac{\pi}{2}\right)$ で

$$\cos \widehat{\mathrm{AM_1}} = \cos \widehat{\mathrm{AM}} \cos \widehat{\mathrm{MM_1}} = \cos R \cos \varepsilon$$

$$\therefore \quad -\sin \widehat{\mathrm{AM_1}} \frac{d(\widehat{\mathrm{AM_1}})}{d\varepsilon} = -\cos R \sin \varepsilon$$

$$\therefore \quad \left[\frac{d}{d\varepsilon}(\widehat{\mathrm{AM_1}})\right]_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) から
$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}(\widehat{\mathrm{AM_1}} - x)\right]_{\varepsilon=0} = -\frac{\sin a}{\sin \widehat{\mathrm{MN}}} < 0$$

よって $\widehat{\mathrm{AM_1}} - x$ は $\varepsilon = 0$ の近傍で減少函数である。AはKの内部にはないから

$$\widehat{\mathrm{AM_1}} \geqq R(\mathrm{M_1})$$

また $r(\mathrm{M_1}) \geqq x$ である。

よって $\widehat{\mathrm{AM_1}} - x \geqq R(\mathrm{M_1}) - x \geqq R(\mathrm{M_1}) - r(\mathrm{M_1}) = O(\mathrm{M_1})$

ところで

$$x \to 0 \quad \text{に対して} \quad \widehat{\mathrm{AM}_1} - x \to O(\mathrm{M})$$

$\widehat{\mathrm{AM}_1} - x$ は減少函数であるから

$$\widehat{\mathrm{AM}_1} - x < O(\mathrm{M})$$

$$\therefore \quad O(\mathrm{M}_1) < O(\mathrm{M})$$

これは $O(\mathrm{M})$ がKについて最小値であることに矛盾する。よって定理は証明せられた。

§ 4. Minimal circular ring の中心の Uniqueness

領域Gで $O(\mathrm{P})$ が異なった2点 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ で最小値をとったと仮定する。$O(\mathrm{P})$ は convex であるから，$\widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$ の中点Oに対して

$$\frac{O(\mathrm{O}_1) + O(\mathrm{O}_2)}{2} \geqq O\left(\frac{\mathrm{O}_1 + \mathrm{O}_2}{2}\right) = O(\mathrm{O})$$

$\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ は minimal circular ring の中心であるから

$$O(\mathrm{O}_1) = O(\mathrm{O}_2)$$

$$\therefore \quad O(\mathrm{O}_1) = O(\mathrm{O}_2) = O(\mathrm{O}) \tag{4.1}$$

$$2\,O(\mathrm{O}) = O(\mathrm{O}_1) + O(\mathrm{O}_2) \tag{4.2}$$

定理 1. から

$$2\,R(\mathrm{O}) \leqq R(\mathrm{O}_1) + R(\mathrm{O}_2) \tag{4.3}$$

定理 2. から

$$2\,r(\mathrm{O}) \geqq r(\mathrm{O}_1) + r(\mathrm{O}_2) \tag{4.4}$$

$$\therefore \quad 2\left\{R(\mathrm{O}) - r(\mathrm{O})\right\} \leqq \left\{R(\mathrm{O}_1) - r(\mathrm{O}_1)\right\} + \left\{R(\mathrm{O}_2) - r(\mathrm{O}_2)\right\}$$

$$\therefore \quad 2\,O(\mathrm{O}) \leqq O(\mathrm{O}_1) + O(\mathrm{O}_2) \tag{4.5}$$

(4.2), (4.5) が両立するためには

(4.3), (4.4) はいずれも等号で成立しなければならない。

$$\therefore \quad 2\,R(\mathrm{O}) = R(\mathrm{O}_1) + R(\mathrm{O}_2)$$

Oから最大距離にあるK上の点をSとすれば

$$2\,R(\mathrm{O}) = 2\,\widehat{\mathrm{OS}} \leqq \widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{S}} + \widehat{\mathrm{O}_2\mathrm{S}} \tag{4.6}$$

然るに

$$R(\mathrm{O}_1) \geqq \widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{S}}, \qquad R(\mathrm{O}_2) \geqq \widehat{\mathrm{O}_2\mathrm{S}} \tag{4.7}$$

$$\therefore \quad R(\mathrm{O}_1) + R(\mathrm{O}_2) = 2\,R(\mathrm{O})$$

$$= 2\,\widehat{\mathrm{OS}} \geqq \widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{S}} + \widehat{\mathrm{O}_2\mathrm{S}} \tag{4.8}$$

(4.6), (4.8) から

$$2\,\widehat{\mathrm{OS}} = \widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{S}} + \widehat{\mathrm{O}_2\mathrm{S}} \tag{4.9}$$

$\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}$ は1つの大円上の3点であるから，上の式が成立するためには，$\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}, \mathrm{S}$ は1つの大円上にある。よってSは $\widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$ の延長上にあるK上の1点で，$\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ からも最大距離にある。何となれば (4.9) から

$$\widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{OS}} - \widehat{\mathrm{OO}_1} \quad , \quad \widehat{\mathrm{O}_2\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{OS}} - \widehat{\mathrm{OO}_1}$$

が導かれるから，容易に分かる。

ここで $R(\mathrm{O}_2) < R(\mathrm{O}_1)$ と仮定すれば

$$R(\mathrm{O}_1) - R(\mathrm{O}_2) = \widehat{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$$

$$O(\mathrm{O_1}) = O(\mathrm{O_2}) \quad \text{から}$$

$$R(\mathrm{O_1}) - r(\mathrm{O_1}) = R(\mathrm{O_2}) - r(\mathrm{O_2})$$

よって
$$R(\mathrm{O_1}) - r(\mathrm{O_1}) = R(\mathrm{O_2}) - r(\mathrm{O_2})$$

∴
$$r(\mathrm{O_1}) - r(\mathrm{O_2}) = \widehat{\mathrm{O_1 O_2}}$$

よって $\mathrm{O_1, O_2}$ を中心として $r(\mathrm{O_1}), r(\mathrm{O_2})$ を半径とする円は内接している。その接点を S′ とすれば大円弧 $\widehat{\mathrm{O_1 O_2}}$ 上に，$\mathrm{O_1, O_2}$, S′, S の順にならんでいる。

然るに上の2つの内接する円はそれぞれKと少なくとも1つの点を共有しているから，Sがその共有点でなければならない。何となれば

$$R(\mathrm{O_2}) < R(\mathrm{O_1}) \quad \text{から} \quad r(\mathrm{O_2}) < r(\mathrm{O_1})$$

故に円 $r(\mathrm{O_2})$ は円 $r(\mathrm{O_1})$ の中に入ってしまって，接点 S′ を除いて円 $r(\mathrm{O_2})$ はKの中にふくまれてしまう。即わちその接点のみがK上の点である。故に S, S′ は一致しなければならない。

よって
$$\widehat{\mathrm{O_1 S}} = \widehat{\mathrm{O_1 S'}}$$

∴
$$R(\mathrm{O_1}) = r(\mathrm{O_1})$$

∴
$$O(\mathrm{O_1}) = 0$$

即わち minimal circular ring の厚さは0となり，凸閉曲線Kは円となる。故に円以外の凸閉曲線に対しては不合理である。よって $\mathrm{O_1, O_2}$ のように minimal circular ring の中心は2個はあり得ない。

以上のことからつぎの定理が得られる。

定理 5. 凸閉曲線Kに対して minimal circular ring の中心は，1個存在してただ1個に限る。

§ 5. R，R_u，についての不等式

minimal circular ring の中心をO，外円を C，内円を $\mathrm{C_k}$, $\mathrm{C_g}$ の半径を R, $\mathrm{C_k}$ の半径を r とする。OがKの外接円の中心 $\mathrm{O_u}$ と一致すれば $R_u = R$, 一致しなければ $R_u < R$ である。ここに R_u はKの外接円の半径である。

$\mathrm{C_u}$ と $\mathrm{C_g}$ の中心距離 $\widehat{\mathrm{O_u O}}$ を $\varDelta$ で表わし，$\mathrm{C_u}$ と $\mathrm{C_g}$ の交点をA，Bとする。$\mathrm{C_u}$ とKとの共有点はすべて $\mathrm{C_g}$ の内部にある $\mathrm{C_u}$ の弧上にあって，それらは半円より大きい円弧上にあるから，$\mathrm{C_g}$ の外にある $\mathrm{C_u}$ の弧ABは半円より小さい。$\mathrm{C_k}$ とKとの共有点の中から2つの点をえらび，$\mathrm{C_g}$ とKとの共有点の中からも2つの点をえらび，これらの4つの点がK上で互いに分離せられているようにすることができる。このことは T. Bonnesen[1), 2)] が平面上の凸閉曲線の minimal circular ring について証明したと同様の方法でできる。よって，$\mathrm{C_u}$ の中にある $\mathrm{C_g}$ の弧 AB 上にKの点が少なくとも2個存在する。その2点を A′, B′ とする。K上で A′ と B′ との間に $\mathrm{C_k}$ との共有点が少なくとも1個存在する。その点を D′ とする。$\mathrm{C_g}$ 内にある $\mathrm{C_u}$ の円弧 AB は半円より大きいのであるから，$\widehat{\mathrm{O O_u}}$ と $\widehat{\mathrm{AB}}$ との交点をDとすれば，Dは $\widehat{\mathrm{O O_u}}$ の延長上にある。即わち $\mathrm{O_u}$ はOとDとの間にある。A′, B′ は $\mathrm{C_g}$ の $\mathrm{C_u}$ 内にある劣弧上にあり，$\mathrm{C_k}$ とKとの共有点 D′ は $\mathrm{C_g}$ の劣弧の弓形 AB 内にある。

故に
$$r = \widehat{\mathrm{OD'}} \geqq \widehat{\mathrm{OD}} = \widehat{\mathrm{O O_u}} + \widehat{\mathrm{O_u D}} = \varDelta + \widehat{\mathrm{O_u D}}$$

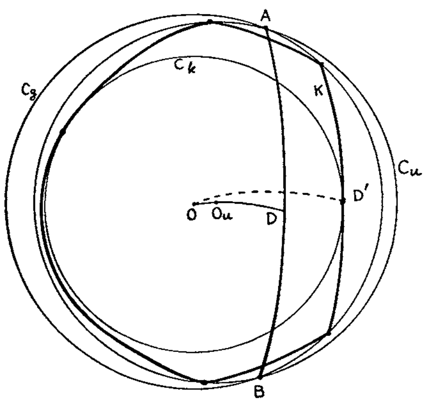
また $\mathrm{C_k}$ は $\mathrm{C_u}$ の内部にあるから

$$r \leqq R_u - \varDelta$$

∴
$$\varDelta + \widehat{\mathrm{O_u D}} \leqq r \leqq R_u - \varDelta \tag{5.1}$$

$$\cos \widehat{\mathrm{OA}} = \cos \widehat{\mathrm{OD}} \cos \widehat{\mathrm{AD}}$$

$$\cos \widehat{\mathrm{O_u A}} = \cos \widehat{\mathrm{O_u D}} \cos \widehat{\mathrm{AD}}$$



第 8 図

$$\therefore \quad \frac{\cos \widehat{\mathrm{OA}}}{\cos \widehat{\mathrm{OD}}} = \frac{\cos \widehat{\mathrm{O_uA}}}{\cos \widehat{\mathrm{O_uD}}}$$

よって $$\frac{\cos R}{\cos \widehat{\mathrm{OD}}} = \frac{\cos R_u}{\cos \widehat{\mathrm{O_uD}}}$$

$$\therefore \quad \cos R = \cos R_u \frac{\cos \widehat{\mathrm{OD}}}{\cos \widehat{\mathrm{O_uD}}}$$

$$= \cos R_u \frac{\cos (\varDelta + \widehat{\mathrm{O_uD}})}{\cos \widehat{\mathrm{O_uD}}}$$

$$= \cos R_u \left\{ \cos \varDelta - \sin \varDelta \tan \widehat{\mathrm{O_uD}} \right\} \tag{5.2}$$

(5.1) から $$\widehat{\mathrm{O_uD}} \leqq R_u - 2\varDelta \tag{5.3}$$

$R_u - 2\varDelta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\tan \widehat{\mathrm{O_uD}} \leqq \tan (R_u - 2\varDelta)$$

$$\therefore \quad \cos R \geqq \cos R_u \left\{ \cos \varDelta - \sin \varDelta \tan (R_u - 2\varDelta) \right\}$$

$$= \cos R_u \frac{\cos (R_u - \varDelta)}{\cos (R_u - 2\varDelta)}$$

$$\therefore \quad \cos R \geqq \cos R_u \frac{\cos (R_u - \varDelta)}{\cos (R_u - 2\varDelta)} \tag{5.4}$$

つぎに，R_u が一定であるとき $\frac{\cos (R_u - \varDelta)}{\cos (R_u - 2\varDelta)}$ の最小値を求める。

$R_u = a,\ \varDelta = x$ とおく。$0 < x \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ である。

$y = \frac{\cos (a - x)}{\cos (a - 2x)}$ とおけば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin x - \sin (2a - 3x)}{2\cos^2 (a - 2x)}$$

$z(x) = 3 \sin x - \sin (2a - 3x)$ は

$0 < x \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ で増加函数である。

$$z(0) = -\sin 2a < 0, \quad z(a) = 4 \sin a > 0$$

であるから，$0 < x < a$ で

$$z(x) = 3 \sin x - \sin (2a - 3x) = 0$$

である x の値がただ1個ある。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{3 \sin 2a}{2 \cos^2 a} < 0$$

であるから，y は $z(x) = 0$ である x の値に対して極小値をとり，従って最小値をとる。

よって $\frac{\cos (a - x)}{\cos (a - 2x)}$ 即わち $\frac{\cos (R_u - \varDelta)}{\cos (R_u - 2\varDelta)}$

は $0 < \varDelta \leqq a$ で最小値をもち，そのときの $\varDelta$ の値は

$$3 \sin \varDelta = \sin (2R_u - 3\varDelta)$$

の根である。この $\varDelta$ の値に対して (5.4) から $\cos R$ の最小値は $\cos R_u \frac{\cos (R_u - \varDelta)}{\cos (R_u - 2\varDelta)}$ である。

従って R_u が一定であるとき，$0 < R \leqq \frac{\pi}{2}$ であるから，R が最大になるのは

$3\sin\Delta=\sin(2R_u-3\Delta)$ であるような Δ の値のときである，よってつぎの定理が得られる。

定理 6. **凸閉曲線の外接円の半径を R_u，中心を O_u，minimal circular ring の外円の半径を R，その中心を O，$O_u\overset{\frown}{O}=\Delta$ とおくと**

$$\cos R\geqq\cos R_u\frac{\cos(R_u-\Delta)}{\cos(R_u-2\Delta)}$$

である。

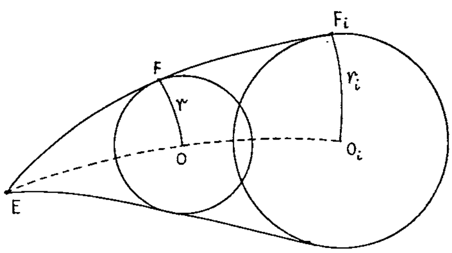
R_u が一定であるとき

$$3\sin\Delta=\sin(2R_u-3\Delta)$$

である Δ の値はただ1個存在して，この Δ の値に対して R が最大値をとる。

§ 6. R, r, r_i についての不等式

minimal circular ring の内円 C_k とKの内接円 C_i との共通の tangent great circle は2個ある。その交点の1つをEとする。ただし $\overset{\frown}{EO_i}$ の間にOがあるような交点をEとする。Eを通る1つの共通の tangent great circle と C_k, C_i との接点をそれぞれ F, F_i とする。



第 9 図

$EO_i=EO+\delta$，ここに $\delta=OO_i$ とおく。

$\overset{\frown}{EF}\leqq\overset{\frown}{EF_i}\leqq\frac{\pi}{2}$ である。

$$\therefore\quad\cos\overset{\frown}{EF_i}\leqq\cos\overset{\frown}{EF}$$

$$\cos\overset{\frown}{EO}-\cos\overset{\frown}{EF}\cos r,$$

$$\cos\overset{\frown}{EO_i}=\cos\overset{\frown}{EF_i}\cos r_i$$

$$\therefore\quad\frac{\cos\overset{\frown}{EO_i}}{\cos r_i}\leqq\frac{\cos\overset{\frown}{EO}}{\cos r}$$

$$\therefore\quad\cos r\leqq\frac{\cos\overset{\frown}{EO}}{\cos\overset{\frown}{EO_i}}\cos r_i=\frac{\cos\overset{\frown}{EO}}{\cos(\overset{\frown}{EO}+\delta)}\cos r_i$$

Eは外円 C_g の外にある。もしEが C_g の周上か内部にあれば C_g が外円であることに矛盾してくる。

$$\therefore\quad\overset{\frown}{EO}\geqq R\qquad\qquad\therefore\quad\cos\overset{\frown}{EO}\leqq\cos R$$

$$\frac{\cos r_i}{\cos r}\geqq\frac{\cos(\overset{\frown}{EO}+\delta)}{\cos\overset{\frown}{EO}}$$

$$=\cos\delta-\sin\delta\tan\overset{\frown}{EO}$$

$\delta<R$, $\overset{\frown}{EO}>R$ から

$$\cos\delta>\cos R,\quad\sin\delta<\sin R,\quad\tan\overset{\frown}{EO}>\tan R$$

$$\therefore\quad\frac{\cos(\overset{\frown}{EO}+\delta)}{\cos\overset{\frown}{EO}}>\cos R-\sin R\tan R=\frac{\cos 2R}{\cos R}$$

$$\therefore\quad\frac{\cos r_i}{\cos r}\geqq\frac{\cos 2R}{\cos R}$$

$$\therefore\quad\cos r\leqq\frac{\cos R}{\cos 2R}\cos r_i$$

定理 7. **凸閉曲線の minimal circular ring の内円の半径を r，外円の半径を R，内接円の半径を r_i とすると**

$$\cos r \leqq \frac{\cos R}{\cos 2R} \cos r_i$$

文　　　献

(1) T. Bonnesen, Über das isoperimetrische Defizit ebener Figure, Math. Annalen, 91 (1924), S. 252 − 268.

(2) T. Bonnesen, Les Problémes des Isopérimétres et des Isèpiphanes.